הרצאה מספר 18
אלגברה 1 מ 104016
הנושא: תלות ואי־תלות לינארית

דר. נתן ולך

הטכניון – הפקולטה למתמטיקה

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.5 מימד של מרחב וקטורי: הרעיון

- הגדרה (זמנית): יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה F.

המימד של V (the dimension of V) שמסומן ע"י $\dim V$

הוא הגודל של קבוצה פורסת קטנה ביותר של V.

- בעיות אפשריות:

1. אין קבוצה פורשת.

בלתי אפשרי, כי הנחנו ש־ V נוצר סופית.

2. אין קבוצה פורשת קטנה ביותר.

בלתי אפשרי, כי קיים קבוצה פורשת סופית, והגודל של כל קבוצה פורשת הוא מספר טבעי או 0.

- לכן, המושג מימד מוגדר היטב.

- בהמשך, קבוצה פורשת בגודל מינימלי יקרא בסיס של V .

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.6 קבוצה פורשת עם וקטורים מיותרים

- יהי $V = \mathbb{R}^2$ ויהי
$S = \{\ e_1 = (1,0),\ \ e_2 = (0,1),\ \ u = (1,1)\ \}$.
- $x \cdot e_1 + y \cdot e_2 + 0 \cdot u = (x,y)$ ולכן S היא קבוצה פורשת של V.
- $(x,y) = x \cdot e_1 + y \cdot e_2$ ולכן $\{e_1, e_2\}$ היא קבוצה פורשת של V.
- $x \cdot u + (y-x) \cdot e_2 = (x+0, x+(y-x)) = (x,y)$
ולכן $\{u, e_2\}$ היא קבוצה פורשת של V.
- $(x-y) \cdot e_1 + y \cdot u = ((x-y)+y, 0+y) = (x,y)$
ולכן $\{e_1, u\}$ היא קבוצה פורשת של V.
- לכל וקטור $\vec{v} \in V = \mathbb{R}^2$ חוץ מ־ $\vec{v} = \vec{0}$ הקבוצה הנפרשת על ידי $T = \{\vec{v}\}$ היא הישר דרך $\vec{v}$ והראשית.
- אין למרחב $V = \mathbb{R}^2$ קבוצה פורשת בגודל 1 (או בגודל 0).
- המימד של $V = \mathbb{R}^2$ הוא 2.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.6 קבוצה פורשת עם וקטורים מיותרים

- יהי $V = \mathbb{R}^2$ ויהי
$S = \{\ e_1 = (1,0),\ \ e_2 = (0,1),\ \ u = (1,1)\ \}$.
- כל וקטור בודד מ־ S מיותר בקשר לפרישת V.
- בעצם, המשוואה $e_1 + e_2 - u = \vec{0}$, היא העדות ל"מיותרות".
- בעזרת המשוואה, אפשר לראות שכל אחד מהוקטירים ב־ S ניתן לקבל כצירוף לינארית של שני הוקטורים האחרים.
- אבל, אף זוג אינו מיותר ביחד.
- לכן, ראוי לחפש הגדרה מתאימה למושג הרעיוני "גדול מדי" / "מכיל וקטור מיותר מבחינת פרישה".
- המושג המתמטי: קבוצה תלויה לינארית.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.7 תלות לינארית

- הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F,
ויהי $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ תת־קבוצה סופית של V.
אם קיימים סקלרים $\alpha_i \in F$, לא כולם 0, כך ש־ $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$
אז S היא קבוצה תלויה לינארית (a linearly dependent set).
- אחרת, S היא קבוצה בלתי־תלויה לינארית (linearly independent).
- הצירוף הלינארי הטריוויאלי (כל הקבועים 0) תמיד נותן את $\vec{0}$.
- בינתיים, ההגדרות נתונות רק לקבוצה סופית של וקטורים.

- אם קיימים סקלרים $\alpha_i \in F$, לא כולם 0, כך ש־ $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$
אומרים ש־ $\vec{0}$ הוא צירוף לינארי לא טריוויאלי של $v_1, \ldots, v_n$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.7 תלות לינארית

- <u>דוגמה:</u> $V=\mathbb{R}^3, \quad S=\left\{ v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$
- צריך לחפש פתרון לא טרויאלי למערכת ההומוגנית: $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
- דירוג:

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} \xrightarrow[R_1\leftrightarrow R_2]{} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-R_2]{} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

- $\operatorname{rank}(A)=3$ ולכן יש $f=3-3=0$ דרגות חופש. הפתרון היחיד הוא הפתרון הטרויאלי. S היא בת"ל (בלתי תלוי לינארית).

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.7 תלות לינארית

- <u>דוגמה:</u> $V=\mathbb{R}^3, \quad S=\left\{ v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$
- צריך לחפש פתרון לא טרויאלי למערכת ההומוגנית: $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
- דירוג:

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&2\end{pmatrix} \xrightarrow[R_1\leftrightarrow R_2]{} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-R_2]{} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

- $\mathrm{rank}(A)=2$ ולכן יש $f=3-2=1$ דרגות חופש. הפתרון הכללי הוא $(\alpha,\beta,\gamma)=t(-1,-1,1)$. S היא ת"ל (תלוי לינארית).

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.7 תלות לינארית

- <u>הגדרה:</u> יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F,
ויהי $S \subseteq V$ תת־קבוצה אינסופית של V.
אם קיימים סקלרים $\alpha_i \in F$, לא כולם 0,
ו־ n וקטורים שונים $v_1, \ldots, v_n \in S$ כך ש־ $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$
אז S היא קבוצה תלויה לינארית (a linearly dependent set).
- אחרת, S היא קבוצה בלתי־תלויה לינארית (linearly independent).

- בעצם, קבוצה אינסופית S תלויה לינארית, אם יש לה תת־קבוצה סופית שתלויה לינארית.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.7 תלות לינארית

- <u>אבחנה:</u> הקבוצה הריקה, $\emptyset$, היא קבוצה בת"ל (בלתי תלוי לינארית).
- <u>נימוק:</u>
  - כדי להיות תלוי לינארית, צריך להיות צירוף לינארי לא טריוויאלי שנותן את $\vec{0}$.
  - אין אף וקטור בקבוצה הריקה, אז אין אף וקטור שיכול להופיע בצירוף הלינארי הנדרש.

- <u>אבחנה:</u> כל קבוצה שמכיל את וקטור האפס, $\vec{0}$, היא קבוצה ת"ל.
- <u>נימוק:</u>
  - בהנחה שהקבוצה סופית, אפשר לקחת את הצ"ל שבו $\vec{0}$ מוכפל ב־ 1, ושאר הוקטורים מוכפלים ב־ 0.
  - לקבוצה אינסופית, התת־קבוצה $\{\vec{0}\}$ שהיא עצמה ת"ל מוכיחה שהקבוצה האינסופית התלות הלינארי.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.7 תלות לינארית

- <u>אבחנה:</u> בקבוצה ת"ל S שאינה מכילה את וקטור האפס, כל צ"ל לא טריוויאלי שנותן $\vec{0}$ מכיל לפחות שני מקדמים שאינם 0.
- <u>נימוק:</u>
  - נניח ש־ $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ צ"ל לא טריוויאלי.
  - יש מקדם שונה מ־ 0. נניח ש־ $\alpha_k \neq 0$.
  - נעביר אגפים ונקבל: $\alpha_k v_k = -\sum_{i \neq k} \alpha_i v_i$.
  - גם $\alpha_k \neq 0$ (ההנחה) וגם $v_k \neq \vec{0}$ (כי $\vec{0} \notin S$). לכן אגף שמאל שונה מאפס.
  - לכן גם אגף ימין שונה מאפס. אזי לא ייתכן שכל המקדמים באגף ימין יהיו 0.
  - לכן יש אינדקס $j \neq k$ כך שגם $\alpha_j \neq 0$. $\square$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.8 תלות ואי־תלות של קבוצות קטנות

- כבר ראינו שהקבוצה הריקה, $\emptyset$, תמיד בת"ל.
- מתי קבוצה שמכיל וקטור יחיד ת"ל?
- <u>אבחנה:</u> קבוצה $S = \{\vec{v}\}$ היא קבוצה ת"ל אם"ם $\vec{v} = \vec{0}$.
- <u>נימוק:</u>
  - כאשר $\vec{v} = \vec{0}$ כבר הבחנו ש־ S ת"ל. לכן נוכל להניח $\vec{v} \neq \vec{0}$.
  - המשוואה $\alpha\vec{v} = 0$ מחייב שגורם אחד הוא 0.
  - כאשר $\vec{v} \neq \vec{0}$ נקבל $\alpha = 0$.
  - לכן אין צ"ל לא טריוואלי שנותן $\vec{0}$, כלומר S בת"ל.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.8 תלות ואי־תלות של קבוצות קטנות

- מתי קבוצה של בדיוק שני וקטורים היא ת"ל?
- נניח בינתיים שאף אחד מהוקטורים הוא וקטור האפס.
- <u>טענה:</u> קבוצה $S = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ היא קבוצה ת"ל אם"ם קיים סקלר t כך ש־ $\vec{v} = t\vec{u}$ או ש־ $\vec{u} = t\vec{v}$.
  - לפי הנחת התלות הלינארי, קיימים $\alpha, \beta \in F$, לא שניהם אפס, כך ש־ $\vec{0} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
  - העברת אגפים נותן: $\beta\vec{v} = -\alpha\vec{u}$
  - אחד הסקלרים אינו אפס, בה"כ נניח $\beta \neq 0$.
    אזי $\vec{u}$ $\vec{v} = \left(\frac{-\alpha}{\beta}\right)$, ואפשר לקחת $t = \frac{-\alpha}{\beta}$.
- אם $\vec{v} = 0$ אזי $\vec{v} = 0 \cdot \vec{u}$. אם $\vec{u} = 0$ אזי $\vec{u} = 0 \cdot \vec{v}$.
- <u>טענה (ניסוח נוסף):</u> קבוצה $S = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ היא קבוצה ת"ל אם"ם אחד מהוקטורים הוא כפולה של הוקטור השני.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.9 תלות ואי־תלות ויחס ההכלה

- **טענה:** יהי V מ"ו, ותהיו S,T תתי־קבוצות כך שמתקיים $S \subseteq T \subseteq V$. ($T$ מכיל את S ומוכל ב־ V). **אזי:**
  1. אם S קבוצה ת"ל, אז גם T קבוצה ת"ל.
  2. אם T קבוצה בת"ל, אז גם S קבוצה בת"ל.
- **נימוק של 1:** נניח ש־ S ת"ל.
  - לפי ההנחה יש ב־ S צירוף לינארי (סופי) ולא טרויאלי שנותן את $\vec{0}$.
  - אם T קבוצה אינסופית זה מספיק להראות T ת"ל.
  - אם T קבוצה סופית, אז ניתן לחבר לצ"ל הנ"ל את הסכום $\sum_{\substack{v\in T\\ v\notin S}} 0\cdot v$, ולקבל צ"ל לא טרויאלי של אברי T שנותן את $\vec{0}$.
  - בשני המקרים: T ת"ל. $\square$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.9 תלות ואי־תלות ויחס ההכלה

- <u>טענה:</u> יהי V מ"ו, ותהיו S,T תתי־קבוצות כך שמתקיים $S \subseteq T \subseteq V$. **אזי:**
  1. אם S קבוצה ת"ל, אז גם T קבוצה ת"ל.
  2. אם T קבוצה בת"ל, אז גם S קבוצה בת"ל.

- <u>נימוק של 2:</u> נניח ש־ T בת"ל.
  - נניח בשלילה ש־ S ת"ל, כלומר יש צירוף לינארי (סופי) ולא טרויאלי $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ של אברים **שונים** מ־ S.
  - אם T קבוצה אינסופית זה מספיק להראות T ת"ל. סתירה!
  - אם T קבוצה סופית, אז נחבר לצ"ל הנ"ל את הסכום $\sum_{\substack{v \in T \\ v \notin S}} 0 \cdot v$.

    נסיק ש־ T ת"ל. סתירה!
  - בשני המקרים קיבלנו סתירה. לכן S חייבת להיות בת"ל. $\square$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.5 מימד של מרחב וקטורי: המשך

- הגדרות זמניות: יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה F.

1. המימד של V (the dimension of V) שמסומן ע"י $\dim V$ הוא הגודל של קבוצה פורסת קטנה ביותר של V.
2. קבוצה פורשת בגודל מינימלי תקרא בסיס של V.

- הגדרות מתוקנות: יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה F.

1. הגדרה: קבוצה פורשת ובת"ל נקראת בסיס של V.
2. הגדרה: המימד של V (the dimension of V) שמסומן ע"י $\dim V$ הוא הגודל של בסיס של V.

- צריך להראות שלכל בסיס מספר שווה של איברים.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות